

บทที่ 2

ระบบพิกัด (Coordinate System)

2.1 บทนำ

ระบบพิกัด (Coordinate system) หมายถึง ระบบที่สร้างขึ้นสำหรับใช้อ้างอิงในการกำหนดตำแหน่ง หรือบอกตำแหน่ง บนแกนอ้างอิง x-y-z และใช้สำหรับอธิบายรายละเอียดทางเวกเตอร์ เช่นการกำหนดความยาวหรือขนาดของเวกเตอร์ ทิศทาง มุมเงาฉาย (projection) หรือองค์ประกอบของเวกเตอร์ ระบบพิกัดจะถูกระบุในบริเวณของแกนแบบ 3 มิติซึ่งจะตั้งฉากกันและกัน คือ แกน x แกน y และแกน z ระบบพิกัดที่ใช้กับเวกเตอร์นี้แบ่งเป็น 3 ระบบคือ

- 1) ระบบพิกัดทรงเหลี่ยมหรือระบบพิกัดฉาก (Cartesian coordinate)
- 2) ระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinate)
- 3) ระบบพิกัดทรงกลม (Spherical coordinate)

2.2 ระบบพิกัดทรงเหลี่ยมหรือระบบพิกัดฉาก (Cartesian coordinate)

ระบบพิกัดทรงเหลี่ยมหรือระบบพิกัดฉาก จะถูกกำหนดในแกนอ้างอิงทั้งสามคือ แกน x แกน y และแกน z

2.2.1 ตัวแปรในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

ตัวแปร : x y และ z

โดยที่

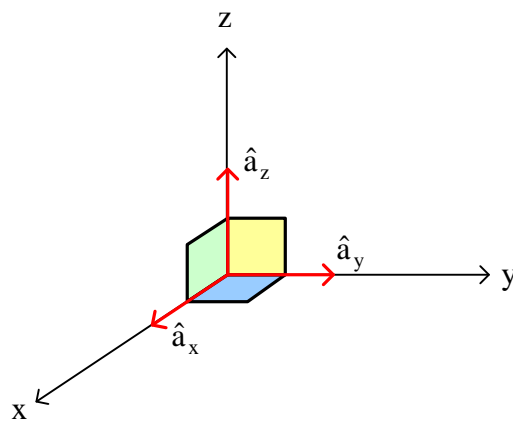
ตัวแปร x เป็นปริมาณในแนวแกน x

ตัวแปร y เป็นปริมาณในแนวแกน y

ตัวแปร z เป็นปริมาณในแนวแกน z

2.2.2 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector) คือเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยนั้น ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมเวกเตอร์หนึ่งหน่วยคือ \hat{a}_x , \hat{a}_y , และ \hat{a}_z โดยที่



รูปที่ 2.1 แสดงเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

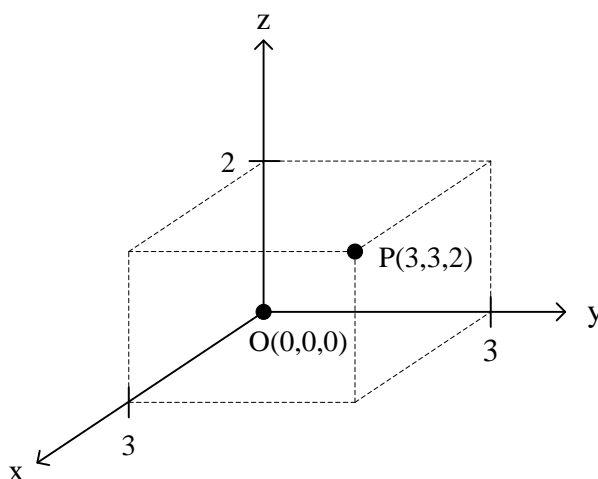
\hat{a}_x เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x

\hat{a}_y เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน y

\hat{a}_z เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน z

2.2.3 การระบุพิกัดในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

การระบุตำแหน่งหรือพิกัดในระบบพิกัดทรงเหลี่ยมจะถูกกำหนดเป็นค่าตัวเลขที่เป็นลำดับแทนค่า x , y และ z ตามลำดับ เช่น จุด $P(3, 3, 2)$ หมายถึงจุด P ห่างจากจุดกำเนิด $(0,0,0)$ ในแนวแกน x เป็นระยะ 3 หน่วย ห่างจากจุดกำเนิด ในแนวแกน y เป็นระยะ 3 หน่วย ห่างจากจุดกำเนิด $(0,0,0)$ ในแนวแกน z เป็นระยะ 2 หน่วย แสดงดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงจุดพิกัด $P(3,3,2)$

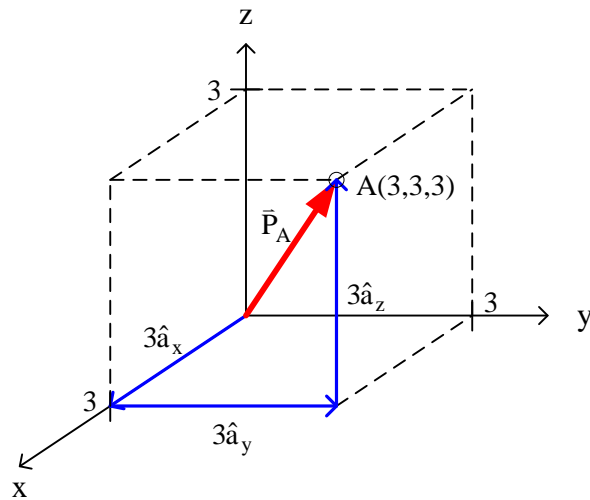
2.2.4 เวกเตอร์บอกตำแหน่งในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม (Position Vector)

เป็นเวกเตอร์ใช้สำหรับระบุตำแหน่งของจุดใดๆ โดยจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์อยู่ที่จุดกำเนิด $(0,0,0)$ จุดปลายอยู่ที่จุดพิกัดนั้น เช่น จุด A มีพิกัดเป็น $A(3, 3, 3)$ จุด A จะมีเวกเตอร์บอกตำแหน่งเป็น $\vec{P}_A = 3\hat{a}_x + 3\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$ ดังนั้นถ้าจุด $A(x, y, z)$ เป็นจุดใดๆแล้ว จะได้เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด $A(x, y, z)$ เป็น

$$\vec{P}_A = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z \quad (2.1)$$

และระยะทางที่จุด A ห่างจากจุดกำเนิดคำนวณได้จาก

$$|\vec{P}_A| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.2)$$



รูปที่ 2.3 แสดงเวกเตอร์บอกตำแหน่ง \vec{P}_A ของจุด $A(3,3,3)$ ในระบบพิกัดทรงเหลี่ยม

ตัวอย่างที่ 2.1 จุด A อยู่ที่ตำแหน่ง $(2, -1, 2)$ จงหาเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด A และ
คำนวณระยะห่างของจุด A กับจุดกำเนิด

วิธีทำ

เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด

A

$$\vec{P}_A = 2\hat{a}_x - \hat{a}_y + 2\hat{a}_z$$

ระยะทางที่จุด A ห่างจากจุดกำเนิด

$$\begin{aligned} |\vec{P}_A| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \quad \text{หน่วย} \end{aligned}$$

ตอบ $2\hat{a}_x - \hat{a}_y + 2\hat{a}_z$, 3 หน่วย

2.3 ระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinate)

2.3.1 ตัวแปรในระบบพิกัดทรงกระบอก

ตัวแปร : ρ , ϕ และ z

โดยที่

ตัวแปร ρ เป็นปริมาณระยะทางบนระนาบ x-y

ตัวแปร ϕ เป็นปริมาณมุมที่ระยะทาง ρ ทำกับแกน x บนระนาบ x-y

ตัวแปร z เป็นปริมาณในแนวแกน z

2.3.2 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector) ในระบบพิกัดทรงกระบอก

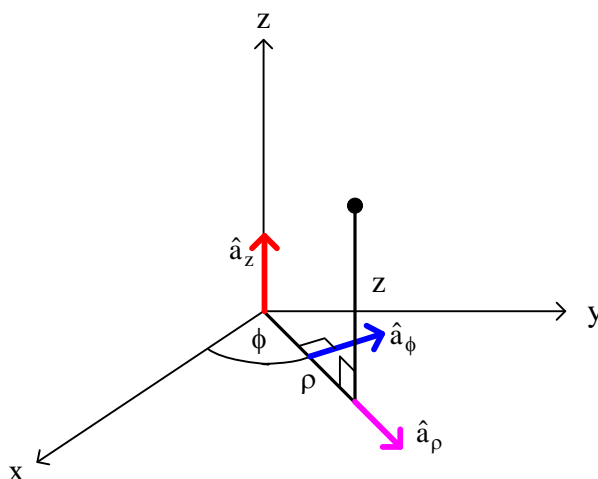
เวกเตอร์หนึ่งหน่วยคือเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยนั้นในระบบพิกัดทรงกระบอกจะมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วย 3 เวกเตอร์คือ \hat{a}_ρ , \hat{a}_ϕ , และ \hat{a}_z

โดยที่

\hat{a}_ρ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ ρ

\hat{a}_ϕ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของมุม ϕ โดยทำมุมตั้งฉากกับระยะทาง ρ

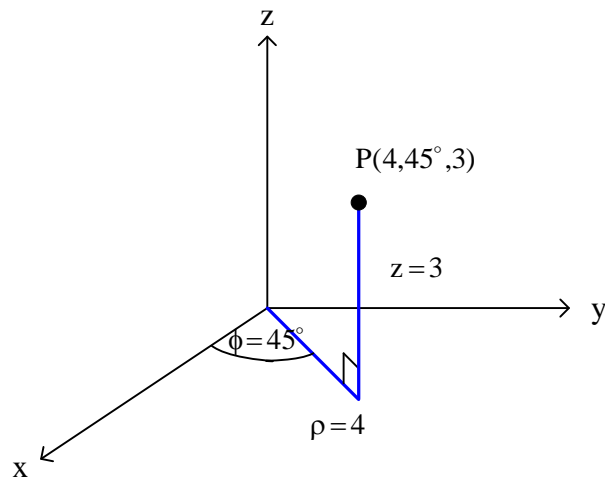
\hat{a}_z เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน z



รูปที่ 2.4 แสดงตัวแปรและเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดทรงกระบอก

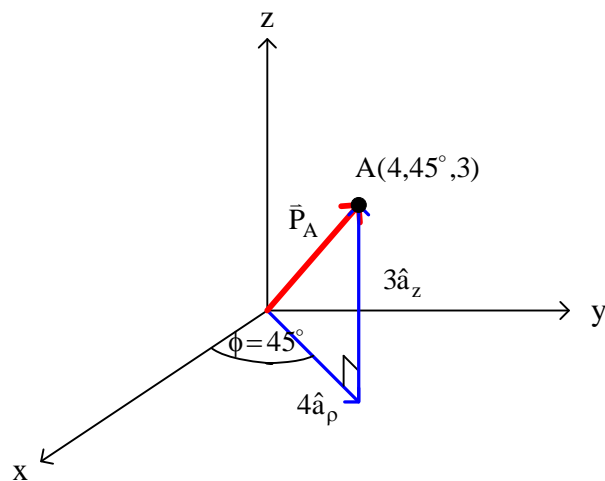
2.3.3 การระบุพิกัดในระบบพิกัดทรงกระบอก

การระบุตำแหน่งหรือพิกัดในระบบพิกัดทรงกระบอกจะถูกกำหนดเป็นค่าตัวแปร ρ , ϕ และ z ตามลำดับ เช่น จุด $P(4, 45^\circ, 3)$ หมายถึงจุด P ห่างจากจุดกำเนิด $(0,0,0)$ ในระนาบ $x-y$ ด้วยระยะ $\rho = 4$ หน่วย และ ρ ทำมุมกับแกน x ด้วยมุม $\phi = 45^\circ$ และจุด P อยู่ห่างจากระนาบ $x-y$ ในแนวตั้งฉากด้วย $z = 3$ หน่วย แสดงดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 แสดงจุดพิกัด $P(4, 45^\circ, 3)$

2.3.4 เวกเตอร์บอกตำแหน่งในระบบพิกัดทรงกระบอก



รูปที่ 2.6 แสดงเวกเตอร์บอกตำแหน่ง \vec{P}_A ของจุด $A(4, 45^\circ, 3)$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก

การเขียนเวกเตอร์บอกตำแหน่งในระบบพิกัดทรงกระบอกให้เขียนเป็นผลบวก
 เวกเตอร์ในทิศทาง \hat{a}_ρ กับ \hat{a}_z เช่น จุด A $(4, 45^\circ, 3)$ จะมีเวกเตอร์บอกตำแหน่งเป็น
 $\vec{P}_A = 4\hat{a}_\rho + 3\hat{a}_z$ ซึ่งแสดงได้ด้วยรูปที่ 2.6 ดังนั้นถ้าจุด A เป็นจุดใดๆ มีพิกัดเป็น $A(\rho, \phi, z)$
 แล้ว เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด $A(\rho, \phi, z)$ จะเป็น

$$\vec{P}_A = \rho\hat{a}_\rho + z\hat{a}_z \quad (2.3)$$

และระยะทางที่จุด A ห่างจากจุดกำเนิดคำนวณได้จาก

$$|\vec{P}_A| = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (2.4)$$

ตัวอย่างที่ 2.2 จุด A อยู่ที่ตำแหน่ง $(2, 45^\circ, 2)$ จงหา

- ก) เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด A
- ข) คำนวณระยะห่างของจุด A กับจุดกำเนิด

ก) เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด A

วิธีทำ

เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด A

$$\vec{P}_A = 2\hat{a}_\rho + 2\hat{a}_z$$

ตอบ $2\hat{a}_\rho + 2\hat{a}_z$

ข) คำนวณระยะห่างของจุด A กับจุดกำเนิด

วิธีทำ

ระยะทางที่จุด A ห่างจากจุดกำเนิด

$$\begin{aligned} |\vec{P}_A| &= \sqrt{2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \quad \text{หน่วย} \end{aligned}$$

ตอบ $2\sqrt{2}$ หน่วย

2.4 ระบบพิกัดทรงกลม (Spherical Coordinate)

2.4.1 ตัวแปรในระบบพิกัดทรงกลม

ตัวแปร : r , θ และ ϕ

โดยที่

ตัวแปร r เป็นปริมาณระยะทางบนระนาบใดๆ และทำมุมกับแกน z ด้วยมุม θ

ตัวแปร θ เป็นมุมที่รัศมี r ทำกับแกน z

ตัวแปร ϕ เป็นมุมที่เงาฉาย (Projection) ของรัศมี r ทำกับแกน x บนระนาบ $x-y$

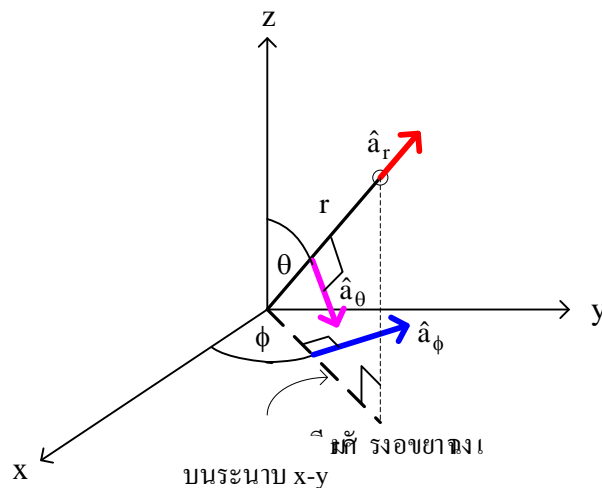
2.4.2 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector) ในระบบพิกัดทรงกลม

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยคือเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยนั้น ในระบบพิกัดทรงกลมจะมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วย 3 เวกเตอร์คือ \hat{a}_r , \hat{a}_θ , และ \hat{a}_ϕ โดยที่

\hat{a}_r เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ r

\hat{a}_θ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของมุม θ โดย \hat{a}_θ ทำมุมตั้งฉากกับรัศมี r

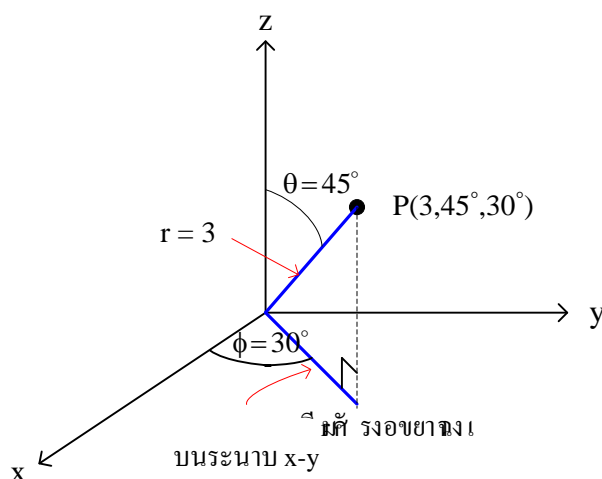
\hat{a}_ϕ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของมุม ϕ โดย \hat{a}_ϕ ทำมุมตั้งฉากกับเงาฉายของรัศมี r บนระนาบ $x-y$



รูปที่ 2.7 แสดงตัวแปรและเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดทรงกลม

2.4.3 การระบุพิกัดในระบบพิกัดทรงกลม

การระบุตำแหน่งหรือพิกัดในระบบพิกัดทรงกลมจะถูกกำหนดเป็นค่าตัวแปร r , θ และ ϕ ตามลำดับ เช่น จุด $P(3, 45^\circ, 30^\circ)$ หมายถึงจุด P ห่างจากจุดกำเนิด $(0,0,0)$ ด้วยระยะ $r = 3$ หน่วย โดยที่ r ทำมุมกับแกน z ด้วยมุม $\theta = 45^\circ$ เสาฉายของ r บนระนาบ $x - y$ จะทำมุมกับแกน x ด้วยมุม $\phi = 30^\circ$ แสดงดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 แสดงจุดพิกัด $P(3, 45^\circ, 30^\circ)$

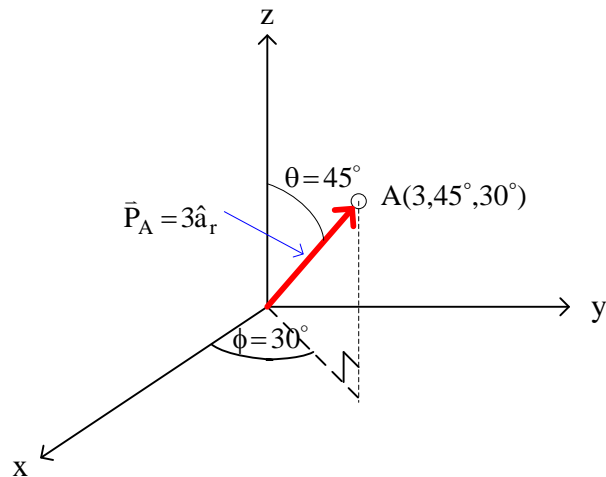
2.4.4 เวกเตอร์บอกตำแหน่งในระบบพิกัดทรงกลม

การเขียนเวกเตอร์บอกตำแหน่งในระบบพิกัดทรงกลม ให้เขียนเป็นเวกเตอร์ในทิศทาง \hat{a}_r เช่น จุด $A(3, 45^\circ, 30^\circ)$ จะมีเวกเตอร์บอกตำแหน่งเป็น $\vec{P}_A = 3\hat{a}_r$ และถ้าจุด $A(r, \theta, \phi)$ เป็นจุดใดๆ แล้ว จะเขียนเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด A ได้เป็น

$$\vec{P}_A = r\hat{a}_r \quad (2.5)$$

และระยะทางที่จุด A ห่างจากจุดกำเนิดคำนวณได้จาก

$$|\vec{P}_A| = r \quad (2.6)$$



รูปที่ 2.9 แสดงเวกเตอร์บอกตำแหน่ง \vec{P}_A ของจุด A (3, 45°, 30°) ในระบบพิกัดทรงกลม

ตัวอย่างที่ 2.3 จุด A อยู่ที่ตำแหน่ง (2, 45°, 30°) จงหา

- ก) เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด A
- ข) ระยะห่างของจุด A กับจุดกำเนิด

ก) เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด A

วิธีทำ

เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด A

$$\vec{P}_A = 2\hat{a}_r$$

ตอบ $2\hat{a}_r$

ข) ระยะห่างของจุด A กับจุดกำเนิด

วิธีทำ

ระยะทางที่จุด A ห่างจากจุดกำเนิด

$$\begin{aligned} |\vec{P}_A| &= \sqrt{2^2} \\ &= 2 \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

ตอบ 2 หน่วย



แบบฝึกหัดหน่วยที่ 2

1. จงบอกความหมายของระบบพิกัด
2. ระบบพิกัดมี 3 ชนิด อะไรบ้าง
3. จงเขียนตัวแปรของระบบพิกัดทั้ง 3 ชนิด
4. กำหนดจุด $Q(2, 5, 3)$ จงหา
 - ก) เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด Q
 - ข) ระยะทางที่จุด Q ห่างจากจุดกำเนิด
5. กำหนดจุด $Q(2, \frac{\pi}{2}, 3)$ จงหาเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด P
 - ก) เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด Q
 - ข) ระยะทางที่จุด Q ห่างจากจุดกำเนิด
6. กำหนดจุด $Q(2, \frac{\pi}{2}, 30^\circ)$ จงหาเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด Q
 - ก) เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด Q
 - ข) ระยะทางที่จุด Q ห่างจากจุดกำเนิด

